



## 1.4 向量和矩阵的范数

1.4.1 向量的范数及其性质

1.4.2 矩阵的范数及其性质





## 1.4 向量和矩阵的范数

学习目标：  
掌握向量范数、矩阵范数等概念。





## § 1.4 向量和矩阵范数

在实数域中，数的大小和两个数之间的距离是通过绝对值来度量的。在解析几何中，向量的大小和两个向量之差的大小是“长度”和“距离”的概念来度量的。为了对矩阵运算进行数值分析，我们需要对向量和矩阵的“大小”引进某种度量。范数是绝对值概念的自然推广。

**“范数”**是对向量和矩阵的一种度量，实际上是二维和三维向量长度概念的一种推广。

**数域**: 数的集合, 对加法和乘法封闭 有理数、实数、复数数域

**线性空间**: 可简化为向量的集合, 对向量的加法和数量乘法封闭, 也称为 **向量空间**





## ➤ 1.4.1 向量范数 (vector norms)

**定义1** 如果向量  $x \in R^n$  的某个实值函数  $f(x) = \|x\|$  满足:

(1) **正定性**:  $\|x\| \geq 0$ , 且  $\|x\| = 0$  当且仅当  $x=0$ ;

(2) **齐次性**: 对任意实数  $\alpha$ , 都有  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(3) **三角不等式**: 对任意  $x, y \in R^n$ , 都有  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

则称  $\|x\|$  为  $R^n$  上的一个**向量范数**。





在向量空间  $R^n (C^n)$  中, 设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

常用的向量  $x$  的范数有

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} \quad x \text{ 的 } 2\text{-范数或欧氏范数}$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad x \text{ 的 } 1\text{-范数}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad x \text{ 的 } \infty\text{-范数或最大范数}$$

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \quad x \text{ 的 } p\text{-范数}, p \geq 1$$

自己证

容易验证, 向量的  $\infty$  范数和 1 范数满足定义 1.5 中的条件。对于 2 范数, 满足定义 1.5 中的条件 (1) 和 (2) 是显然的, 对于条件 (3), 利用向量内积的 **Cauchy-Schwarz** 不等式可以验证。



显然  $\|x\|_1$  和  $\|x\|_2$  是  $\|x\|_p$  在  $p = 1$  和  $p = 2$  时的特例

并且由于

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| &\leq (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} \leq (n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p)^{1/p} \\ &= n^{1/p} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (p \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$\|x\|_p \rightarrow \|x\|_\infty$  ( $p \rightarrow \infty$  时), 所以  $\|x\|_\infty$  也是  $\|x\|_p$  的特例

$$\text{且 } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

**定理1**  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$





**注意:**一般有向量的等价关系

$$c_1 \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq c_2 \|x\|_p \quad (p \neq q, p, q = 1, 2, \infty; c_1, c_2 \in \mathbf{R}^+)$$

**例 1** 求下列向量的各种常用范数

$$x = (1, 4, 3, -1)^T$$

**解:**  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_4| = 9$

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_4|^2)^{1/2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 4} |x_i| = 4$$

显然, 本例中  $c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_\infty$ , 即

$$1 * 4 \leq 9 \leq 9/4 * 4 = 9$$





## ➤ 1.4.2 矩阵的范数( matrix norms )

**定义2** 如果矩阵  $A \in R^{n \times n}$  的某个实值函数  $f(A) = \|A\|$  满足

- (1) **正定性**:  $\|A\| \geq 0$  且  $\|A\| = 0$  当且仅当  $A = \mathbf{0}$ ;
- (2) **齐次性**: 对任意实数  $\alpha$ , 都有  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ ;
- (3) **三角不等式**: 对任意  $A, B \in R^{n \times n}$  都有  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4) **相容性**: 对任意  $A, B \in R^{n \times n}$  都有  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

则称  $\|A\|$  为  $R^{n \times n}$  上的一个**矩阵范数**



## 常用的矩阵范数

$$(1) \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

A的每列绝对值之和的最大值, 称A的列范数

$$(2) \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

A的每行绝对值之和的最大值, 称A的行范数

$$(3) \quad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \quad \text{称 } A \text{ 的 } 2\text{-范数}$$

其中  $\lambda_{\max}(A^T A)$  为  $A^T A$  的特征值的绝对值的最大值





**例2** 设 $n$ 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$  类似向量的 2-范数

$$\text{设 } \|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

不难验证其满足定义2的4个条件. 因此  $\|A\|_F$  是一种矩阵范数

称为Frobenius范数, 简称F-范数.

$$(4) \text{ 设 } \|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

称 $A$ 的F-范数.





**定义3** 对于给定的向量范数  $\|\cdot\|_v$  和矩阵范数  $\|\cdot\|_\mu$ ,

若  $\forall x \in R^n, A \in R^{n \times n}$ , 都有

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_\mu \|x\|_v$$

则称所给的向量范数  $\|\cdot\|_v$  和矩阵范数  $\|\cdot\|_\mu$  相容.

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \leq \|A\|_F$$

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$$

因此  $\|A\|_F$  与  $\|x\|_2$  相容





### 例3 求矩阵A的各种常用范数

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Row sums: 3, 4, 2  
Column sums: 2, 5, 2

解:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_{1 \leq j \leq n} \{2, 5, 2\} = 5$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \{3, 4, 2\} = 4$$

由于

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$





因此先求  $A^T A$  的特征值

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(\lambda I - A^T A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 9 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

可得  $A^T A$  的特征值为

$$\lambda_1 = 9.1428, \lambda_2 = 2.9211, \lambda_3 = 0.9361$$

$$\lambda_{\max}(A^T A) = 9.1428$$





$$\|A\|_1 = 5$$

$$\|A\|_\infty = 4$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$$= 3.0237$$

$$\|A\|_F = \sqrt{2 + 9 + 2}$$

$$= 3.6056$$

$$\|A\|_1$$

$$\|A\|_\infty$$

$$\|A\|_2$$

$$\|A\|_F$$

容易计算

计算较复杂

较少使用

使用最广泛

对矩阵元素的变化比较敏感

性质较好

使用最广泛





**定义4** 设  $A \in R^{n \times n}$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 称

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$$

为矩阵  $A$  的谱半径

显然  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^T A)}$

谱范数

( spectral norm )

对于某种向量范数  $\|x\|_v$  和算子范数  $\|A\|_v$ ,

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_v \|x\|_v$$

而

$$\|Ax\|_v = \|\lambda x\|_v = |\lambda| \cdot \|x\|_v$$

因此

$$|\lambda| \cdot \|x\|_v \leq \|A\|_v \|x\|_v$$





即

$$|\lambda| \leq \|A\|_v$$

所以

$$\rho(A) \leq \|A\|_v$$

即矩阵 $A$ 的谱半径不超过矩阵的任何一种算子范数

**定理1.** 设 $\|\cdot\|$ 是 $R^{n \times n}$ 上的一种算子范数,  $A \in R^{n \times n}$ ,

若 $A$ 满足 $\|A\| < 1$ , 则 $I + A$ 非奇异, 且

$$\|(I + A)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|A\|}$$

**证明:略**





**例4** 设矩阵**A**与矩阵**B**是对称的, 求证

$$\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$$

**证** 因为  $A = A^T$ , 于是有

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A) = \lambda_{\max}(A^2) = [\rho(A)]^2$$

即  $\|A\|_2 = \rho(A)$ 。同理  $\|B\|_2 = \rho(B)$ 。

由于  $A + B = (A + B)^T$ , 所以

$$\rho(A + B) = \|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2 = \rho(A) + \rho(B)$$

