# 第 2 章 对偶线性规划

一般来说，对于一个线性规划问题，一定存在与此互为对偶关系的另一个线性规划问题。

## 2.1 对偶问题的引出及定义

### 2.1.1 引例

**例 2.1** 乐山厂计划出产甲、乙两种产品，该厂使用 $d_1$、$d_2$ 和 $d_3$ 三种生产因素的数量限制、每产品所需各种因素及出厂后可获利润如下表 2-1 所示，求该厂所能得到的最大利润。

**表 2-1**

| 因素 / 产品 | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | 单位利润 |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 1 | 2 | 1 | 5 |
| 乙 | 3 | 1 | 1 | 4 |
| 最多可动用生产因素 | 90 | 80 | 45 | |

**解**：设 $x_1$ 为甲产品的生产数量，$x_2$ 为乙产品的生产数量，据已知条件得出线形规划

$$\left[\begin{array}{l} \max\ Z = 5x_1 + 4x_2 \\ s\cdot t\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 90 \\ 2x_1 + x_2 \le 80 \\ x_1 + x_2 \le 45 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (1)$$

如果我们反面来考虑该问题：最低应付出多少代价，放能使乐山厂放弃生产 $x_1$ 和 $x_2$ 的活动而出让 $d_1$，$d_2$ 和 $d_3$ 生产因素。

分析：要使乐山厂放弃生产 C 和 $x_2$ 出让 $d_1$，$d_2$ 和 $d_3$ 生产因素、也就等于说要乐山厂放弃由生产 $x_1$ 和 $x_2$ 所获得的最大利益，因此，我们最少应付出相等或大于这个最大收益的数值，才能从乐山厂获得 $d_1$，$d_2$ 和 $d_3$ 生产因素。

假设生产因素 $d_1$，$d_2$ 和 $d_3$ 的单位机会成本分别为 $W_1$，$W_2$ 和 $W_3$。那么，这三种因素的最低价值应该是 $\min G = 90W1 + 80W2 + 45W3$

并且有：$\max Z \le \min G$

另一方面，生产单位 $x_1$ 或 $x_2$ 所需用的生产因素 $d_1$，$d_2$ 和 $d_3$ 的机会价格不能低于 $x_1$ 或 $x_2$ 的单位收益。否则的话，乐山厂宁愿自己生产而不会出让生产因素，因此我们得到反

面问题的约束：

$$s \cdot t \begin{cases} w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 5 \\ 3w_1 + w_2 + w_3 \geq 4 \\ w_1、w_2、w_3 \geq 0 \end{cases}$$

归纳起来，得到反面问题的线形规划：

$$\left[\begin{array}{l} \min G = 90W1 + 80W2 + 45W3 \\ s \cdot t \begin{cases} w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 5 \\ 3w_1 + w_2 + w_3 \geq 4 \\ w_1、w_2、w_3 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \tag{2}$$

我们称规划（2）是规划（1）的对偶规划。

### 2.1.2 定义

称线形规划

$$(L \cdot P)\left[\begin{array}{l} \max Z = CX \\ s \cdot t \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

与线形规划

$$(D \cdot P)\left[\begin{array}{l} \min G = b^T W \\ s \cdot t \begin{cases} A^T w \geq C^T \\ W \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

为互为对偶规划。

## 2.2 对偶问题的性质

### 2.2.1 对偶关系表

利用以上两规划的形式我们可以得出一个对偶关系表，如表 2-2 所示。

**表 2-2**

| | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_m$ | $\cdots$ | $x_n$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_1$ | $c_2$ | $\cdots$ | $c_m$ | $\cdots$ | $c_n$ | | $\max Z$ / $\min G$ |
| | $\wedge$ | $\wedge$ | | $\wedge$ | | $\wedge$ | | |
| $W_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1m}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $\leq$ | $b_1$ |
| $W_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2m}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | $\leq$ | $b_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $W_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mm}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $\leq$ | $b_m$ |

(1)从行看是原问题（Ⅰ），从列看是对偶问题（Ⅱ），两个问题的变量系数矩阵互为转置矩阵。

（2）原问题（Ⅰ）的常数项是对偶问题（Ⅱ）的目标系数，反之，原问题（Ⅰ）的目标系数是对偶问题（Ⅱ）的常数项。

（3）原问题（Ⅰ）有 n 个决策变量，对偶问题（Ⅱ）有 n 个约束方程：原问题有 m 个约束方程，对偶问题就有 m 个决策变量。

（4）原问题的约束是“ ≤ ”型，对偶问题的约束是“ ≥ ”型。

（5）原问题的目标函数是求极大，对偶问题的目标是求极小。

**例 2.2** 在例 2.1 中引出的两规则：

$$\begin{cases} \max Z = 5x_1 + 4x_2 \\ s\cdot t \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 90 \\ 2x_1 + x_2 \le 80 \\ x_1 + x_2 \le 45 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{cases} \min G = 90w_1 + 80w_2 + 45w_3 \\ s\cdot t \begin{cases} w_1 + 2w_2 + w_3 \ge 5 \\ 3w_1 + w_2 + w_3 \ge 4 \\ w_1, w_2, w_3 \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

的对偶关系表如表 2-3。

从以上对偶表的关系知，只要我们得到定义中的原线性规划就可得到对偶规划，这样不要再像例 1 那样通过分析建模，但对于一个普通线性规划的对偶规划的寻找方法还需要进一步探讨。

**表 2-3**

| | $x_1$ | $x_2$ | | maxZ / minG |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 4 | | |
| | $\wedge$ | $\wedge$ | | |
| $W_1$ | 1 | 3 | ≤ | 90 |
| $W_2$ | 2 | 1 | ≤ | 80 |
| $W_m$ | 1 | 1 | ≤ | 45 |

### 2.1.2 对偶问题的性质

对偶问题的性质比较多，在这里我们仅介绍几个较常用的性质，至于别的性质，请同学参阅其他的有关运筹学的书籍。

**定理 1** 如果线性规划（Ⅰ）中的第 $k$ 个约束条件是等式，则它的对偶规划（Ⅱ）中的第 $k$ 个变量 $W_k$ 无非负限制（$W_k$ 为自由变量)。

反之，若原线性规划（Ⅰ）中的第 $k$ 个变量无非负性要求，则对偶规划（Ⅱ）中的第 $k$ 个约束为等式。

证：设线性规划（Ⅰ）的第 $k$ 个约束条件为等式，即

$$\begin{cases} \max Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \\ s\cdot t \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases} \end{cases} \qquad (Ⅰ)$$

将 $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k$ 写为两个等价的不等式：

$$\begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \ge b_k \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k \end{cases}$$

$$或\begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k \\ -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 + \cdots - a_{kn}x_n \le -b_k \end{cases}$$

代入（Ⅰ）式得出线性规划

$$\left[\begin{array}{l} \max Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \\ s \cdot t \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k \\ -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \cdots - a_{kn}x_n \le -b_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (Ⅱ)$$

得对偶关系表如表 2-4

表 2-4

| | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_m$ | $\cdots$ | $x_n$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $c_1$ | $c_2$ | $\cdots$ | $c_m$ | $\cdots$ | $c_n$ | | maxZ / minG |
| | $\wedge$ | $\wedge$ | | $\wedge$ | | $\wedge$ | | |
| $W_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1m}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $\le$ | $b_1$ |
| $W_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2m}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | $\le$ | $b_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ |
| $W_k'$ | $a_{k1}$ | $a_{k2}$ | $\cdots$ | $a_{km}$ | $\cdots$ | $a_{kn}$ | $\le$ | $b_k$ |
| $W_k''$ | $-a_{k1}$ | $-a_{k2}$ | $\cdots$ | $-a_{km}$ | $\cdots$ | $-a_{kn}$ | $\le$ | $-b_k$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ |
| $W_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mm}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $\le$ | $b_m$ |

由对偶关系表得出（Ⅰ）的对偶规划

$$\left[\begin{array}{l} \min G = b_1W_1 + b_2W_2 + \cdots + b_kW_k' - b_kW_k'' + \cdots + b_mW_m \\ s \cdot t \begin{cases} a_{11}W_1 + a_{21}W_2 + \cdots + a_{k1}W_k' - a_{k1}W'' + \cdots + a_{m1}W_m \ge C_1 \\ a_{12}W_1 + a_{22}W_2 + \cdots + a_{k2}W_k' - a_{k2}W'' + \cdots + a_{m2}W_m \ge C_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}W_1 + a_{2n}W_2 + \cdots + a_{kn}W_k' - a_{kn}W'' + \cdots + a_{mn}W_m \ge C_n \\ W_1, W_2, \cdots, W_k', W_k'', \cdots, W_m \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

令 $W_k = W_k' - W_k'' \qquad (W_k', W_k'' \ge 0)$

则上式变为

$$\begin{cases} \min G = b_1W_1 + b_2W_2 + \cdots + b_kW_k + \cdots + b_mW_m \\ s\cdot t \begin{cases} a_{11}W_1 + a_{21}W_2 + \cdots + a_{k1}W_k + \cdots + a_{m1}W_m \ge C_1 \\ a_{12}W_1 + a_{22}W_2 + \cdots + a_{k2}W_k + \cdots + a_{m2}W_m \ge C_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}W_1 + a_{2n}W_2 + \cdots + a_{kn}W_k + \cdots + a_{mn}W_m \ge C_n \\ W_1, W_2, \cdots, W_m \ge 0, \quad W_k \text{无非负要求}, K \in \{1, 2, \cdots m\} \end{cases} \end{cases}$$

同样可证定理的反面（情形 2)。

有了定义和定理 1 后，任一个线性规划得对偶规划都可以写出，其写法为：

（ i ）将目标函数转化为求最大

（ii ）将约束条件转化为“ ≤ ”型或“ = ”型

（iii）写出对偶关系表

（iv）据对偶表的规定写出对偶规划。

例 2.3　写出线性规划

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s\cdot t \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 - 3x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_1, x_3 \ge 0,_4 \quad x_2, x \text{无非负性限制} \end{cases} \end{cases}$$

的对偶规划

解：①将规划的“ ≥ ”型约束变为“ ≤ ”型约束，得到

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s\cdot t \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ -x_1 + 3x_3 - x_4 \le -1 \\ x_1, x_3 \ge 0, \quad x_2, x_4 \text{无非负性限制} \end{cases} \end{cases}$$

②写出对偶关系表如表 2-5。

**表 2-5**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | maxZ / minG |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 1 | 1 | | |
| | ∧ | ‖ | ⩓ | | | |
| $W_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | ≤ | 5 |
| $W_2$ | 2 | -1 | 3 | 0 | = | -4 |
| $W_m$ | -1 | 0 | 3 | -1 | ≤ | -1 |

③据表 2-5 得对偶规划

$$\begin{cases}\min G=5W_1+(-4)W_2-W_3\\ s\cdot t\begin{cases}W_1+2W_2-W_3\geq 2\\ W_1-W_2=1\\ W_1+3W_2+W_3\geq 1\\ W_1-W_3=1\\ W_1,W_3\geq 0,\quad W_2\text{无非负性要求}\end{cases}\end{cases}$$

**定理 2** 若 $X,W$分别为互为对偶规划（Ⅰ）与（Ⅱ）的可行解，则$\min G\geq\max z$

**证：**因为$G=b^TW\geq(AX)^TW=X^TA^TW=X^T(A^TW)\geq X^TC^T=(CX)^T=CX=z$ 所以，$\min G\geq\max z$。

**定理 3** 若 $X^*,W^*$分别为互为对偶规划（Ⅰ）与（Ⅱ）的可行解，并且$CX^*=b^TW^*$，则 $\overline{X}^*$与$W^*$分别为（Ⅰ）与（Ⅱ）的最优解。

因为，由定理 2 知，对（Ⅰ）与（Ⅱ）的任一可行解 $X,W$ 都有$G\geq Z(CX\leq b^TW)$，所以，特别的对可行解 $X^*$也有$b^TW\geq CX^*$成立。

又因为，$CX^*=b^TW^*$，故对任何可行解$W$,都有 $b^TW\geq CX^*=b^TW^*$ 从而由极小值的最优解的定义知，$W^*$是（Ⅱ）的最优解。同理可证，$X^*$是规划（Ⅰ）的最优解。

**定理 4** 对偶问题的对偶是问题

证：设原问题是$\max f(X)=CX;AX\leq b;X\geq 0$根据对偶问题的标准形式可找到它的对偶问题$\min G=b^TW;A^TW\geq C^T,W\geq 0$对上式的目标函数两边取负号$-\min G=-b^TW$又因为 $-\min G=\max(-G)$,所以$\max(-G)=-b^TW,$ 给约束条件两边取负号，得$-A\ W\leq -C^T$，$W\geq 0$合起来有线性规划

$$\begin{cases}\max(-G)=-b^TW\\ s\cdot t\begin{cases}-A^TW\leq -C^T\\ W\geq 0\end{cases}\end{cases}$$

根据标准形式的对偶关系，上式的对偶问题是

$$\min(-C')=-CX;\quad -AX\geq -b;\quad X\geq 0$$

又因为$\min(-G')=-\max W'$

所以，$-\max W'=-CX;\quad -AX\geq -b;\quad X\geq 0$

即$\max f(X)=CX;AX\leq b;X\geq 0$即是原问题。

**定理 5** 设 $X^*$为线性规划（L,p）的基本最优解，对应基阵为 B，并且其检验数全部非正，则$W^*=C_BB^{-1}$是对偶规划（D,p）的最优解。

证明：由线性代数的知识知（L,P）对应于 $X^*$的典型式为

$$X_B=X_B^*-B^{-1}NX_N=B^{-1}b-BNX_N\qquad f=f^0-(C_BB^{-1}N-CN)X_N=f^0-\lambda X_N$$

又因为$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)=C-C_BB^{-1}A$

由$\lambda\le 0$知,$C-C_BB^{-1}A\le 0$，从而$W^*A\ge C$。

即$W^*$是（D,P）的可行解。

又因为，$W^*b=C_BB^{-1}b=C_BX_B^*=CX^*$由定理 3 知$W^*$是对偶规划的最优解。

## 2.3 对偶单纯形法

### 2.3.1 问题引出

例 2.4 求解线性规划

$$\begin{cases}\max f=-x_1-3x_2\\ s\cdot t\begin{cases}2x_1+x_2\ge 3\\ 3x_1+2x_2\ge 4\\ x_1+2x_2\ge 1\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}\end{cases}$$

解：先把问题标准化：

$$\begin{cases}\max f=-x_1-3x_2\\ s\cdot t\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=3\\ 3x_1+2x_2-x_4=4\\ x_1+2x_2-x_5=1\\ xj\ge 0\qquad (j=1,2,\cdots,5)\end{cases}\end{cases}$$

若取$x_3,x_4,x_5$为基变量，所得基本解$X^0=(0,0,0,-3,-4,-1)^T$不是可行解，故它不能作单纯形法的初始解，为了得到初始可行解，按前章办法引入人工变量$x_6,x_7,x_8$,然后采用两阶段或大 M 法求解，这样一来，增加了变量的数目。

显然麻烦，眼看一个负的单位阵，但不能作基阵使用，实在遗憾。在这种情况下，能否找到比两阶段法更为简便的方法呢？

也许有的同学们会想到先求其对偶问题。

$$\begin{cases}\min g=3W_1+4W_2+W_3\\ s\cdot t\begin{cases}2W_1+3W_2+W_3\le -1\\ W_1+2W_2+2W_3\le -3\\ W_1,W_2,W_3\ge 0\end{cases}\end{cases}$$

此对偶问题可用单纯性法求解。

但是我们还嫌太麻烦，我们还是希望利用原问题进行迭代求解，这当然不是单纯形迭代而必须是一种新的迭代方法，这就是对偶单纯形法。

### 2.2.2 方法的基本思想

在本例中，$X^0=(0,0,0,-3,-4,-1)^T$虽然不是原问题的可行解，但却是基本解，且对

应的检验数（-1，-3，0，0，0）全部非正，容易验证对应的$C_B B^{-1}$是对偶问题的可行解（此时称$X^0$具有对偶可行性），一般地，如果$X^0$是（L,p）的基本解且对应检验数全部非正，则对应的$C_B B^{-1}$必为对偶问题（D,p）的可行解。如果在迭代过程中，保持基本解的对偶可行性，而使其对原问题的非可行性逐步消失，一旦基本解达到可行，则此解必是原问题的最优解。这就是对偶单纯形法的基本思想，为表达方便起见，先引进下面概念。

定义：对于（L,p），其检验数全部非正的基本解称为（L,p）的正则解，对应的基称为正则基。

从而可知，如果$X^0$既是（L,p）的正则解，又是它的可行解，则$X^0$也是（L,p）的最优解。所谓对偶单纯形法就是以这一事实为依据。即从（L,p）的正则解开始迭代，在迭代过程中保持正则性，而使其不可行逐步消失，最后达到可行解，从而得到最优解。

### 2.3.3　对偶单纯形方法步骤

第一步：建立线性规划的单纯形表

第二步：判别，若单纯形表中的$b_i \ge 0(i=1,2,\cdots,m)$,且$\lambda_j \le 0$，则$X$是最优解。若某负常数项，对应行中的变量系数无负数，则该规划无最优解，否则进行第三步。

第三步：确定出基变量，选常数列中最小负数对应的行中的基变量出基，即$\min\left\{b_i \middle| b_i < 0\right\} = b_l$所对应行的基变量出基。

第四步：确定入基变量$\theta_s = \left\{\frac{\lambda_j}{a_{ij}^*}\middle|\lambda_j < 0, a_{ij}^* < 0\right\}$对应的变量入基。

第五步：确定主元，将主元变 1，主元所在列上的其他元素变为零。

### 2.3.4　方法应用举例

例 2.5　利用对偶单纯形法求解线性规划

$$\max\ Z = -x_1 - 3x_2$$

$$s \cdot t\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

**解**：求解过程如表 2-6 所示。

由对偶单纯形表 2-6 可知

$x^* = \left(\frac{3}{2},\quad 0,\quad 0,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\right)^T$，$\max Z = -\frac{3}{2}$。

表 2-6

| $c_j$ | | -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b_i$ | |
| 0 | $x_3$ | -2 | -1 | 1 | 0 | 0 | -3 | |
| 0 | $x_4$ | $\boxed{-3}$ | -2 | 0 | 1 | 0 | -4 | ← |
| 0 | $x_5$ | -1 | -2 | 0 | 0 | 1 | -1 | |
| $z_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $c_j$- $z_j$ | | -1 ↑ | -3 | 0 | 0 | 0 | | |
| 0 | $x_3$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | ← |
| -1 | $x_1$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{4}{3}$ | |
| 0 | $x_5$ | 0 | $-\frac{4}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | |
| $z_j$ | | -1 | $-\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{4}{3}$ | |
| $\lambda_j$= $c_j$- $z_j$ | | 0 | $-\frac{7}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ ↑ | 0 | | |
| 0 | $x_4$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | |
| 1 | $x_1$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{3}{2}$ | |
| -1 | $x_2$ | 0 | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | |
| $z_j$ | | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | |
| $\lambda_j$= $c_j$- $z_j$ | | 0 | $-\frac{5}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | | |

## 2.4 灵敏度分析

灵敏度分析所研究的问题是，当某一规划的最优解已知的情况下，某数据发生变化后对最优解产生的影响。原数据发生变化的主要原因可能有原始数据不可靠或准确度不高，实际问题的条件模糊不清或被忽略，优解执行一段时间后环境条件发生变化等。例如，市场条件一变，显然价值系数 $c_j$ 就随之改变，资源限量根据供应和发展也很可能改变，因此影响 $b_i$ 的取值；约束条件系数 $a_{ij}$ 也会随生产条件及技术的改进而发生变化。因此我们有必要研究当某些系数变化，或增减变量及约束条件时，问题的最优解改变多少，或者最优解不改变时，这些数据的允许变化范围又有多大。当然。以上数据条件改变后，

也可建立一个新规划，从头求解，但这样做显得太费时，对一些问题也是无必要的。其次也不利于计算机的使用。

### 2.4.1 目标函数系数的灵敏度分析

设线性规划 $\max Z = Cx$

$$s \cdot t \begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

的最优解表示为:

$$\begin{cases} x_i = \bar{b}_i - \sum_{j=m+1}^{n} \bar{a}_{ij} x_{ij} \\ z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j x_j \end{cases}$$

其中，$\lambda_j = c_j - z_j, z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i \bar{b}_i, Z_j = c_i \bar{a}_{ij}$

由上式显见，当目标系数$c_j$有改变量$\Delta c_j$时，对解$x_j$无直接影响，但对目标函数$Z$值及检验数$\lambda_j$有影响，如果$\lambda_j$变化比较大，将使得原判断优解的结论改变，导致继续迭代，使优解变动。现在我们仅考虑在最优解不变的情况下，$c_j$允许有最大变化范围。

因为$c_j$变到$c_j + \Delta c_j (j = 1,2,\cdots,m,m+1,\cdots,n)$时目标函数变为：

$$\begin{aligned} z + \Delta z &= \sum_{i=1}^{m} (c_i + \Delta c_i) \bar{b}_i + \sum_{j=m+1}^{n} [c_j + \Delta c_j - \sum_{i=1}^{m} (c_i + \Delta c_i) \bar{a}_{ij}] x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \bar{b}_i + \sum_{i=1}^{m} \Delta c_i \bar{b}_i + \sum_{j=m+1}^{n} [\lambda_j + (\Delta c_j - \sum_{i=1}^{m} \Delta c_i \bar{a}_{ij})] x_j \end{aligned}$$

与原式比较，$Z_0$得到改变量$\sum_{i=1}^{m} \Delta c_i \bar{b}_i$；而检验数据得到改变量$(\Delta c_j - \sum_{i=1}^{m} \Delta c_i \bar{a}_{ij})$。

另外可知，$c_j$的改变在最后单纯形表中仅影响检验数行，约束条件系数的各行不受影响。假若$c_j$改变后，检验数改变，但仍满足最优判别条件，这时仅需对优值进行调解。

例 2.7 某厂生产甲、乙两种产品，这两种产品都需要在 A、B、C 三种不同的设备上加工，每种产品在不同设备上加工所需要的时

**表 2-7**

| 加工时数 \ 设备<br>产品 | $A$ | $B$ | $C$ | 利润（元/件） |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 3 | 5 | 9 | 70 |
| 乙 | 9 | 5 | 3 | 30 |
| 有效工时 | 540 | 450 | 720 | |

间，这些产品销售后所能获得的利润值，以及这三种加工设备因各种条件限制所能使用的有效加工总时数如 2-7 所示，试进行灵敏度分析。

**解**：设 $x_1, x_2$ 分别为甲、乙两种产品的生产数量，得线性规划数模：

$$\max z = 70x_1 + 30x_2$$

$$s \cdot t\begin{cases}3x_1 + 9x_2 \le 540 \\ 5x_1 + 5x_2 \le 450 \\ 9x_1 + 3x_2 \le 720 \\ x_1, x_2 \ge 0\end{cases}$$

利用单纯形法，求得最优解对应的单纯形表如表 2-8 所示。

表 2-8

| $c_j$ | | 70 | 30 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\bar{b}$ |
| 0 | $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{12}{5}$ | 1 | 180 |
| 30 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{3}{10}$ | $-\frac{1}{6}$ | 15 |
| 70 | $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{6}$ | 75 |
| $\lambda_j$ | | 0 | 0 | 0 | -2 | $-\frac{20}{3}$ | 5700 |

设甲产品的利润 $c_1 = 70$ 有改变量 $\Delta c_1$，将 $70 + \Delta c_1$ 代入上表 2-8，得出表 2-9。

表 2-9

| $c_j$ | | $70+\Delta c_1$ | 30 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
| 0 | $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{12}{5}$ | 1 | 180 |
| 30 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{3}{10}$ | $-\frac{1}{6}$ | 15 |
| $70+\Delta c_1$ | $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{6}$ | 75 |
| $\lambda_j$ | | 0 | 0 | 0 | $-2+\frac{1}{10}\Delta c_1$ | $-\frac{20}{3}-\frac{1}{6}\Delta c_1$ | $5700+70\Delta c_1$ |

由表 2-9 看出，当 $c_1$ 改变时，如果仍要保持表 2-8 中得出的最优解，则据最优判别条件知，检验数应满足：

$$\lambda_4=-2+\frac{1}{10}\Delta c_1\le 0;$$
$$\Delta c_1\le 20$$
$$\lambda_5=-\frac{20}{3}-\frac{1}{6}\Delta c_1\le 0;$$
$$\Delta c_1\ge -40$$

由此可知$c_1$的变化范围为：

$$30\le c_1\le 90$$

目标函数值：

$$Z_0=5700+75\Delta c_1$$

同理可得，当$c_2$有改变量$\Delta c_2$时，对应的单纯形表如表 2-10 所示。

表 2-10

| $c_j$ | | 70 | $30+\Delta c_2$ | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
| 0 | $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{12}{5}$ | 1 | 180 |
| $30+\Delta c_2$ | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{3}{10}$ | $-\frac{1}{6}$ | 15 |
| 70 | $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{6}$ | 75 |
| $\lambda_j$ | | 0 | 0 | 0 | $-2-\frac{1}{10}\Delta c_2$ | $-\frac{20}{3}+\frac{1}{6}\Delta c_1$ | $5700+30\Delta c_2$ |

由表知，要使$c_2$有改变量$\Delta c_2$后优解仍不变，则需有：

$$\lambda_4=-2-\frac{3}{10}\Delta c_2\le 0;\Delta c_2\ge -\frac{20}{3}$$

$$\lambda_5=-\frac{20}{3}+\frac{1}{6}\Delta c_2\le 0;\Delta c_2\le 40$$

所以，当$\frac{70}{3}\le c_2\le 70$时，原来的优解仍不改变

这种类型的灵敏度分析，在实际中可以供生产单位分析，当价格变动时，是否影响产品生产的最优安排，从而决定照原生产计划生产，还是进行调整。

### 2.4.2 约束条件的常数项的灵敏度分析

在现实问题中，约束条件的右端常数项，往往代表资源的限制量。一般来说，资源的限制量不是一成不变的，而是随生产条件、市场供应情况进行变动。所以人们常常想知道，对于一个确定的优方案，当资源增加或减少多少时，对方案的影响将有多大。这种类型的灵敏度分析就是处理该类问题的方法。

现假定问题的第$l$种资源限制$b_l$有改变量$\Delta b_l$。由于常数项的改变，对最优判别准则

的检验数$\lambda = C - C_B B^{-1} A \le 0$无关。即是说，最优基对应的单纯变量表中的最后行不发生变化。而表中的基变量$x_B = B^{-1}\bar{b}$是否可行还需讨论。

设$b_l$变到$b_l + \Delta b_l$时，得到新的基本解

$$x_B^* = B^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l + \Delta b_l \\ b_m \end{bmatrix} = B^{-1}b + B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta b_l \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= x_B + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1l} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2l} & \cdots & \beta_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{ml} & \cdots & \beta_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta b_l \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{1l} \\ \beta_{2l} \\ \vdots \\ \beta_{ml} \end{bmatrix} \Delta b_l = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 + \beta_{1l}\Delta b_l \\ \bar{b}_2 + \beta_{2l}\Delta b_l \\ \vdots \\ \bar{b}_m + \beta_{ml}\Delta b_l \end{bmatrix}$$

为了保证$x_B^*$可行，即要求$x_B^* \ge 0$，

$$\begin{Bmatrix} \bar{b}_1 + \beta_{1l}\Delta b_l \ge 0 \\ \bar{b}_2 + \beta_{2l}\Delta b_l \ge 0 \\ \vdots \\ \bar{b}_m + \beta_{ml}\Delta b_l \ge 0 \end{Bmatrix}$$

因此，对$x_i^* \ge 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$应满足的条件为：

当$\beta_{il} < 0$时，　　$\Delta b_l \le \min_i \left\{ \frac{-\bar{b}_i}{\beta_{il}} \right\}$；

当$\beta_{il} > 0$时，　　$\Delta b_l \ge \max_i \left\{ \frac{-\bar{b}_i}{\beta_{il}} \right\}$　　。

故,右端常数项在最优基不变的条件下，能够改变的范围为：

$$\max_i \left\{ \frac{-b_i}{\beta_{il}} \middle| \beta_{il} \succ 0 \right\} \le \Delta b_l \le \min_i \left\{ \frac{-\bar{b}_i}{\beta_{il}} \middle| \beta_{il} \prec 0 \right\}$$

例 2.8　对例 2.7 的线性规划问题，讨论右端常数项的灵敏度分析。

解：从最优单纯形表 2-8 得出：

$$x_B = (180,15,75)^T$$
$$b = (540,450,720)^T$$
$$\bar{b} = (180,15,75)^T$$
$$B^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & -\frac{12}{5} & 1 \\ 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{6} \end{Bmatrix}$$

所以，当$b_2$有改变量$\Delta b_2$时，要求

$$\left\{ \frac{-15}{\frac{3}{10}} \right\} \le \Delta b_2 \le \min\left\{ \frac{-180}{-\frac{12}{5}}, \frac{-75}{-\frac{1}{10}} \right\}$$

故得，$-50 \le \Delta b_2 \le 75$。

当$b_3$有改变量$\Delta b_3$时，据公式要求

$$\max\left\{ \frac{-180}{1}, \frac{-75}{\frac{1}{6}} \right\} \le \Delta b_3 \le \left\{ \frac{-15}{-\frac{1}{6}} \right\}$$

即$-180 \le \Delta b_3 \le 90$。对应单纯形表如表 2-11 所示。

表 2-11

| $c_j$ | | 70 | 30 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
| 0 | $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{12}{5}$ | 1 | $180+\Delta b_3$ |
| 30 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{3}{10}$ | $-\frac{1}{6}$ | $15-\frac{1}{6}\Delta b_3$ |
| 70 | $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{6}$ | $75+\frac{1}{6}\Delta b_3$ |
| $\lambda_j$ | | 0 | 0 | 0 | -2 | $-\frac{20}{3}$ | $-5700-\frac{20}{3}\Delta b_3$ |

由表 2-11 知，当$\Delta b_3 = 90$时，最优解为：

$x^* = (90,0,270,0,0)^T$,最优值$Z_0 = 6300$元。

### 2.4.3　系数矩阵的灵敏度分析

约束系数矩阵的变化不仅影响检验数和最优解值，而且也会改变最优解基逆阵的基向量。因为，变化的系数如果是主元，则整个单纯形表的元素都受到该元素的变化的影响。

一般的，发生变化的系数大多是非基变量的系数。它的改变不会影响到现行最优解的可行性，如果要有影响的话，那将是对现行解是否还是保持最优的问题。以下两种情形进行讨论。

1．非基列向量的变化

假定非基列向量 $p_j$ 变到 $p'_j$，则经迭代后，最优解表中仍为非基列，可用逆矩阵表示为：$\overline{P}'_j = B^{-1}p'_j$，此列对应的检验数为：

$$\overline{\lambda} = C_j - C_B B^{-1} p'_j。$$

其中单纯形算子不收非基列系数变化的影响。如果次检验数 $\overline{\lambda} \le 0$，则原最优解表仍为最优，否则要继续迭代运算，把此非基变量 $x_j$ 引进解基，变换第 $j$ 列。

2.某一元素的变化

当非基列 $p_j$ 中某元素 $a_{lj}$ 变化到 $a'_{lj}$，即有改变量：$\Delta a_{lj} = a'_{lj} - a_{lj}$ 而其他元素不变。当 $p_j$ 迭代后仍为非基列，$B^{-1}$ 中的 $j$ 列为 $\beta_j$，则改变量 $\Delta a_{ij}$ 用以下方法来确定。

因为要求 $\overline{\lambda'_j} = \lambda_j - c_B\beta_j\Delta b_{lj} \le 0$，

$\overline{\lambda'_j} = \lambda_j - c_B\beta_j\Delta b_{lj} \le 0$，

所以，若 $b_B\beta_j > 0$，$\Delta b_{lj} \ge \dfrac{\lambda_j}{C_B B_j}$；

若 $c_B\beta_j < 0$ 时，$\Delta b_{lj} \le \dfrac{\lambda_j}{C_B\beta_j}$。

**例** 2.8　讨论线性规划

$$\max z = 2x_1 + x_2 + x_3$$
$$s \cdot t \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

的系数列向量 $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 变到 $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 的情况以及 $a_{13} = 1$ 的变化范围。

解：首先利用单纯形法得出初始单纯形表及最优单纯形表如表 2-12。

表 2-11

| $c_j$ | | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ |
| 0 | $x_4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | $x_5$ | -1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| $\lambda_j$ | | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 | |
| 2 | $x_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | $x_5$ | 0 | 3 | 1 | 1 | 1 | 10 |
| $\lambda_j$ | | 0 | -3 | -1 | -2 | 0 | |

由于 $p_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$变到$p_2'\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$。所以，由表 2-12 及前公式知。

$$\overline{P_2'}=B^{-1}p_2'=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}$$

$$\overline{C}_BB^{-1}=(20)\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=(2,0)$$

$$\overline{\lambda_2'}=C_2-C_BB^{-1}\overline{P_2'}=-1-(20)\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}=-5$$

因此，当前解仍为最优解，变化的地方仅需将最优单纯形表中的第二列换为$(2,5)^T$。以下求元素$a_{13}$的变化范围：

因为，$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},c_B=(2,0),c_B\beta_1=(2\quad 0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2$，系数$a_{13}$不是基变量的系数，

而且$x_3$的检验数$\lambda_3=-1$。所以$\Delta a_{13}\geq\frac{\lambda_3}{2}=\frac{-1}{2}$，即$a_{13}$的变化无上界。

当变化系数是属于基变量的系数列时，建议按具体的最优化单纯形表进行分析，这里不给出变动范围。

### 2.4.4　决策变量的灵敏度分析

在讨论一个规划问题时，从资源的充分利用角度考虑，有时认为多安排一些生产项目是有利的，这反映在线性规划模型上是增添决策变量的问题。另一方面当规划执行一段时间后，资源的供应不能满足要求时，有时也要考虑少安排一些生产项目是有利的，这反映在数模上就是减少决策变量的问题。所以，决策变量个数的变化有两种情况，一是增多，一是减少。现分别在下面讨论。

1.减少决策变量的情形。

（1）若减少的决策变量不在最优解的基变量之中，对这种情况可以认为决策变量本来就是多余的。减少这个变量不影响优解、优值。

（2）若减少的决策变量是基变量，要考虑去掉这个变量的影响，可用单纯形法或对偶单纯形法重新求解。

2.增加变量的情形

设已知增加的新变量 $x_k$ 的目标系数为 $c_k$，相应的约束系数为 $a_{ik}$，这时由公式 $z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \overline{\lambda}_k x_j$ 知，若新加变量对应的检验数 $\overline{\lambda}_k > 0$，则目标函数还有增大的希望，即对我们增加的项目是有利的，否则增加的变量无实际意义。

**例 2.10** 对例 2.7 的规划问题进行讨论。现假设还有丙、丁两种产品可以用 A,B,C 三种设备加工,它们所用的定额及利润如表 2-13 所示。

**表 2-13**

| 产品 \ 设备加工时数 | $A$ | $B$ | $C$ | 利润（元/件） |
|---|---|---|---|---|
| 丙 | 1 | 2 | 3 | 20 |
| 丁 | 3 | 1 | $\frac{3}{4}$ | 12 |

问是否能使丙或丁产品投产，最优解及新 Z 值是多少？

**解**：分析，如果安排丙产品记为 $x_3$，不安排丁产品，则有 $x_3$ 对应的检验数

$$\overline{\lambda}_3 = c_3 + \sum_{i=1}^{3} a_{13} \bullet \lambda_i = 20 + 1 \times 0 + 2 \times (-2) + 3 \times (-\frac{20}{3}) = -4$$

由此可知，安排丙产品，对企业不利，因为每生产一件丙产品，可下降利润 4 元。

如果安排丁产品，记为 $x_3$，不安排丙产品。则有 $x_3$ 对应的检验数

$$\overline{\lambda}_3 = c_3 + \sum_{i=1}^{3} a_{13} \bullet \lambda_i = 12 + 3 \times 0 + 1 \times (-2) + \frac{3}{4} \times (-\frac{20}{3}) = 5$$

由此可知，安排丁产品的生产，对企业有利，利润可增大。

进一步计算增加 $x_3$ 后在最优单纯形表中的变化及它的系数。

因为，

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{12}{5} & 1 \\ 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$，由此得出 $x_3$ 对应的系数

$$B^{-1}\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{12}{5} & 1 \\ 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{20} \\ \frac{7}{40} \\ \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

在原最优解表 2-8 的基础上，将松弛变量改为 $x_4, x_5, x_6$ 增加丁产品 $x_3$ 列，得表 2-14。因 $\bar{\lambda}_3 > 0$，故继续迭代，迭代结果告诉我们，将丁产品（$x_3$）安排生产 $\frac{600}{7}$ 件，而产品乙不安排对企业有利。

表 2-11

| $c_j$ | | 70 | 30 | 12 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | $x_B$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $b$ |
| 0 | $x_4$ | 0 | 0 | $\frac{27}{20}$ | 1 | $-\frac{12}{5}$ | 1 | 180 |
| 30 | $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{7}{40}$ | 0 | $\frac{3}{10}$ | $-\frac{1}{6}$ | 15 |
| 70 | $x_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{40}$ | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{6}$ | 75 |
| $\lambda_j$ | | 0 | 0 | 5 | 0 | -2 | $-\frac{20}{3}$ | 5700 |
| 0 | $x_4$ | 0 | $-\frac{54}{7}$ | 0 | 1 | $-\frac{33}{7}$ | $\frac{16}{7}$ | $\frac{450}{7}$ |
| 12 | $x_3$ | 0 | $\frac{40}{7}$ | 1 | 0 | $\frac{12}{7}$ | $-\frac{20}{21}$ | $\frac{600}{7}$ |
| 70 | $x_1$ | 1 | $-\frac{1}{7}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{7}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{510}{7}$ |
| $\lambda_j$ | | 0 | $-\frac{200}{7}$ | 0 | 0 | $-\frac{74}{7}$ | $-\frac{80}{7}$ | 6129 |

### 2.4.5 增加约束条件的灵敏度分析

在新增加约束条件下，如原问题的基变量仍未改变，则因增加约束条件不会扩大可行域只会减少或保持原可行域，这时只要 $x_B$ 可行，就必须是最优，若不然，说明新约束条件把原问题的最优排除，这时需将新约束条件列入单纯形表，用对偶单纯形法求解。

**例 2.10** 设例 2.7 中甲、乙产品还必须经过设备 D 的加工厂成为最终产品。已知 D 加工单位甲需 3 小时，单位乙需 8 小时，最大使用工时为 720 小时，则新增的约束条件为 $8x_1 + 3x_2 \le 720$

将原问题所得的最优解 $x = (75,15)^T$ 代入上约束条件仍能满足，故新增条件最优解无影响。

若将设备 D 的最大使用工时限制为 600 小时，这时所得约束条件：$8x_1+3x_2\le 600$，这时最优解不再满足约束了，为了得到增加约束后的最优解，在原最优解表的基础上，通过行变换将上述新约束条件加入，得新表 2-15。

表 2-15

| 基变量 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{12}{5}$ | 1 | 0 | 180 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{3}{10}$ | $-\frac{1}{6}$ | 0 | 15 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | 75 |
| $x_6$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $-\frac{5}{6}$ | 1 | -45 |
| $\lambda_j$ | 0 | 0 | 0 | -2 | $-\frac{20}{3}$ | 0 | 5700 |

显然，该表对应的基本解不可行，采用对偶单纯形法，得表 2-16。

表 2-15

| 基变量 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{63}{25}$ | 0 | $\frac{6}{5}$ | 126 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{8}{25}$ | 0 | $-\frac{1}{5}$ | 24 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{3}{25}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | 66 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{25}$ | 1 | $-\frac{6}{5}$ | 54 |
| $\lambda_j$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{6}{5}$ | 0 | -8 | 5340 |

由上表及对偶单纯形法知，最优解 $x^*=(66,24,126,0,54,0)^T$，最优值为 5340 元，即加一道工序后，约束所起作用仅降低 360 元利润。

以上述的几种灵敏度分析，仅限于某数值、变量、约束条件的变化对解的影响，这是一些基本的分析方法。若要考虑某区间上一个或几个参数作连续变化的灵敏度分析，请同学们参阅线性规划方面的资料或书籍。